

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (5+5 Pkt.): Sei $\beta \in \mathbb{R}$ eine fest vorgegebene Konstante. Bestimmen Sie alle $y_1, y_2, y_3, r, s \in \mathbb{R}$ mit

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - y_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (b) (2r + s) \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zusatzfrage: Was bedeutet es in (b), wenn $\beta = \frac{5}{3}$ ist?

Aufgabe 2 (3+3+4 Pkt.): Seien

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} \quad \text{und} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

die reellen 3×3 -Matrizen mit

$$a_{ij} = i + j \quad \text{und} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1, & i \leq j, \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

- (a) Geben Sie die Matrizen A und B explizit an.
- (b) Berechnen Sie AB und BA .
- (c) Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ sei

$$C = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie C^2, C^3 und C^4 .

Aufgabe 3 (10 Pkt.): Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 11 \\ 6 & 5 & 17 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie explizit Elementarmatrizen $E_1, \dots, E_k$, sodass $E_k \cdots E_1 \cdot A$ in Zeilenstufenform ist und berechnen Sie das Produkt $E_k \cdots E_1$.

Aufgabe 4 (7+3 Pkt.): Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \det(3 \cdot A + x \cdot I_2)$.

- (a) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = x^2 + 3(a_{11} + a_{22})x + 9 \det(A).$$

- (b) Bestimmen Sie (z.B. mit der p - q -Formel) die möglichen Nullstellen von f in Termen der a_{ii} und $\det(A)$.

Abgabe: In den entsprechenden Zettelkasten gegenüber vom Raum 25.22.00.58 bis Mi., 20.05.2026, 10:00 Uhr.

Besprechung: In der Übung am Mi., 20.05.2026.